СБОРНИК ЗАДАНИЙ

V МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

«УНИКУМ»

ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 3-6 КЛАССОВ

Учебное пособие

Липецк
2014

МАУ ДО «Центр дополнительного образования «Стратегия»

СБОРНИК ЗАДАНИЙ
V МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «УНИКУМ»
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 3-6 КЛАССОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Липецк – 2014

ББК 22.1
УДК 37
С23

Сборник заданий V математической олимпиады «УНИКУМ» для обучающихся 3-6 классов: Учебное пособие / Сост.: Г.А. Воробьев, И.А. Шуйкова. – Липецк: МАУ ДО «Центр дополнительного образования «Стратегия», 2014. - 32 с.

Пособие предназначено для учащихся 3-6 классов общеобразовательных учреждений, желающих расширить свои знания и умения в математике, как школьной, так и олимпиадной. В состав сборника вошли задания V олимпиады «Уникум», ответы и указания к их решению.

Предисловие

Математическая Олимпиада школьников 3-6 классов «Уникум» проводится ежегодно, начиная с 2010 года, факультетом физико-математических и компьютерных наук Липецкого государственного педагогического университета и Центром дополнительного образования «Стратегия», которыми накоплен значительный опыт по довузовской работе со школьниками, проявляющими математические способности. Работа преподавателей ФФМиКН и Центра «Стратегия» с такими ребятами складывается из нескольких составляющих: проведение занятий по дополнительным общеразвивающим программам в течение года; организация и проведение «Математических боев» среди школьных команд города Липецка; проведение математической Олимпиады «Уникум»; организация летних профильных школ Центра «Стратегия».

Олимпиада «Уникум» предоставляет прекрасную возможность для школьников 3-6 классов соотнести свои знания со знаниями сверстников, развить свои способности, почувствовать атмосферу конкурса, получить призы, а также интересно и с пользой провести время. В рамках Олимпиады «Уникум» традиционно проходит семинар для учителей математики, на котором преподаватели факультета ФМиКН проводят разбор решения нестандартных задач для обучающихся младшего и среднего школьного возраста.

Олимпиада проводится по классическим правилам – школьники получают в аудитории тексты задач и в течение часа решают их, оформляя подробное решение в своих тетрадях. Текст олимпиады, рассматриваемой в сборнике, состоит из десяти заданий различного уровня сложности, который, как правило, увеличивается от первых к последним задачам. Некоторые задачи, посильные разным возрастным группам школьников, повторяются в разных вариантах. Первые задачи не представляют особой трудности для большинства обучающихся, что создает мотивацию к решению последующих задач. Наличие относительно несложных одной-двух первых задач также особо необходимо тем школьникам, которым пока не по силам более серьезные задачи.

В данном пособии приведены не только условия, но и краткие указания к решению почти всех задач. Пособие в первую очередь рассчитано на тех учащихся, для которых важно научиться искать решение самостоятельно. Не всегда у школьников есть возможность в течение учебного года ознакомиться с подходами к решению олимпиадных задач, идеями и методами их решения. Приведенные в сборнике решения задач помогут учащимся приобрести новые знания, идеи и расширить свой математический инструментарий. Если ребенок только начал осваивать методы решения нестандартных задач, то ему уместно будет сначала предложить читать и разбирать предложенные задачи совместно с Вами – родителями и учителем, а после этого попробовать решать новые задачи самостоятельно. Наиболее способным и хорошо решающим ребятам лучше, наоборот, сначала решить задачи самостоятельно, а затем обсудить решение с учителем.

Задачи пособия различны по тематике и могут быть использованы учителями на занятиях математических факультативов и спецкурсов. Одним ребятам решение предложенных задач позволит подняться на новый уровень математического мышления, другим – предоставит возможность заняться любимым делом. В любом случае, каждого из школьников ожидает свой собственный процесс развития и мы, ребята, желаем Вам успехов в этом занимательном путешествии!

До встречи на Олимпиаде «Уникум»!

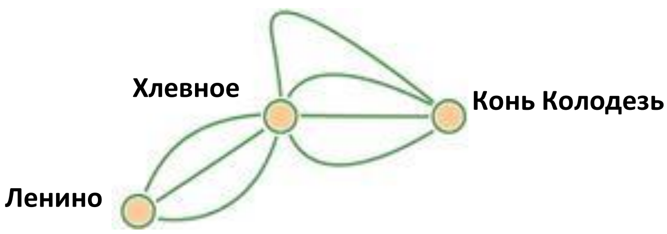
Задания V математической олимпиады для младших школьников «Уникум», май 2014

Математическая олимпиада «Уникум». 3 класс

1. Поставьте в записи 1*2*3*4*5=7 вместо звездочек знаки плюс или минус так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример расстановки знаков.

2. На олимпиаде «Уникум» каждый участник получил ровно один сертификат. До Вани Иванова сертификаты получили 354 школьника, а после него 465. Сколько было участников олимпиады?

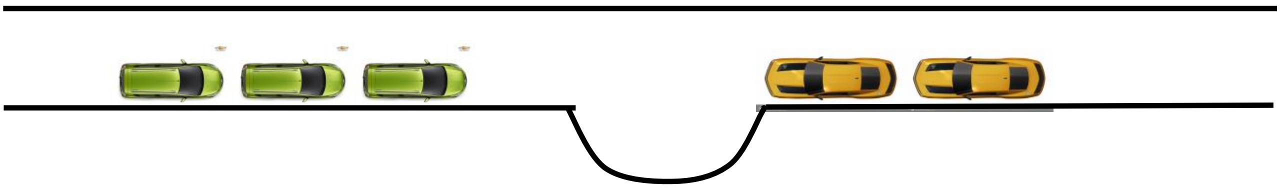
3. Из села Ленино в село Хлевное ведут три дороги, а из села Хлевное в село Конь Колодезь – четыре дороги. Сколько существует путей из села Ленино в село Конь Колодезь? Каждый путь проходит через село Хлевное только один раз.



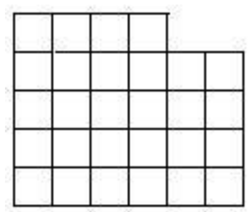
4. Четырехзначное число назовём «двукратным», если одна из его цифр в два раза больше другой и в два раза меньше третьей. Например, в числе 2014 цифра 2 в два раза больше цифры 1 и в два раза меньше цифры 4. Напишите ближайшее «двукратное» число, следующее за 2014.

5. В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку «клубничное»?

6. На узкой дороге, ведущей к центру «Стратегия», два автомобиля разъехаться не могут, но имеется «карман» в который может заехать один автомобиль. По дороге в одну сторону едут друг за другом три автомобиля, а навстречу им ещё два автомобиля. Могут ли автомобили разъехаться так, чтобы продолжать свой путь по-прежнему? А если бы автомобилей было больше?



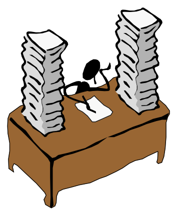
7. Бабушка хочет из клетчатой скатерти, которая изображена на рисунке, сделать две одинаковые салфетки. Помогите бабушке и разрежьте скатерть, приведенную на рисунке на две одинаковые части.



8. На какое максимальное число кусков можно разделить круглый торт при помощи трёх прямолинейных разрезов?

9. Имеется четыре различных ключа от четырёх сейфов с различными замками. Каждый ключ подходит ровно к одному сейфу. Какое минимальное количество попыток открыть сейфы нужно предпринять, чтобы точно подобрать ключ к каждому из сейфов?

10. *Старинная задача.* Сошлись два пастуха, Иван и Петр. Иван и говорит Петру: «Отдай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец ровно вдвое больше, чем у тебя!». А Петр ему отвечает:
«Нет! Лучше ты мне отдай одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!»



Сколько же было у каждого овец?

Математическая олимпиада «Уникум». 4 класс

1. Поставьте в записи 1*2*3*4*5=25 вместо звездочек знаки арифметических действий: +, –, **•**, **:** так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример расстановки знаков.

2. Участник математической олимпиады «Уникум» выполнил 10 задач за 1 час 10 минут, причем на каждую задачу он затратил одинаковое время. Сколько минут школьнику потребовалось на решение четвёртой задачи?

3. У числа 248 средняя цифра в два раза отличается от крайних. Сколько всего имеется трёхзначных чисел, у которых средняя цифра в два раза отличается от крайних?

4. На окраску деревянного кубика затратили 4 грамма краски. Когда она высохла, кубик распилили на 8 одинаковых кубиков меньшего размера. Сколько краски потребуется для того, чтобы закрасить образовавшиеся при этом неокрашенные поверхности?

5. Можно ли испечь такой торт, который может быть разделён одним прямолинейным разрезом на 5 частей? А на 2014 частей?

6. На олимпиаде «Уникум» первые 4 места заняли школьники Вася, Петя, Ирина и Маша. Сумма мест занятых Васей, Петей и Ириной равна 9, а сумма мест Ирины и Маши равна 5. Какое место занял каждый из названных школьников, если Петя занял более высокое место, чем Вася?

7. Уникум отпил 40 г из чашки (в чашке 180 г) кофе и долил ее молоком. Затем выпил еще 50 г из чашки кофе с молоком и опять долил ее молоком. Потом этот человек выпил полчашки и опять долил чашку молоком до полной чашки. Наконец, этот человек выпил полную чашку. Чего он выпил больше: кофе или молока?

8. Кошка Мурка съедает вкусную сосиску за 6 минут, а кот Васька – в 2 раза быстрее. За какое время они съедят сосиску вместе?

9. В примере на сложение цифры заменили звёздочками. Получилось ** + *** = ****. Известно, что каждое из слагаемых и сумма не изменятся, если прочитать их справа налево. Восстановите исходный пример.

10. Уникум выписывал в ряд натуральные числа по порядку: 12345678910111213141516171819... Какая цифра стоит на 2014 месте?

Математическая олимпиада «Уникум». 5 класс

1. Определите последнюю цифру в произведении

$$2010\cdot 2011\cdot 2012\cdot 2013\cdot 2014\cdot 2015\cdot 2016\cdot 2017\cdot 2018\cdot 2019.$$

2. Участник олимпиады «Уникум» решил первую задачу за четыре минуты, а на каждую следующую задачу он тратил на одну минуту больше, чем на предыдущую. Сколько времени он потратил на решение 9 задач?

3. Три человека заплатили за обед 30 рублей (каждый по 10). После их ухода хозяйка обнаружила, что обед стоит не 30, а 25 рублей, и отправила мальчика с 5 рублями вдогонку. Каждый из путников взял себе по рублю, а 2 рубля они оставили мальчику. Выходит, что каждый из них заплатил не по 10, а по 9 рублей. Их было трое: $9\cdot 3=27$, и еще два рубля у мальчика: 27 + 2 = 29. Куда делся рубль?

4. Уникум предлагал своему товарищу написать любое двузначное число, затем поменять местами цифры этого числа и вычесть из большего меньшее. После выполненных действий Уникум просил товарища назвать последнюю цифру полученной разности и по названной цифре определял всю разность. Как Уникуму удалось это сделать?

5. На какое число кусков можно разрезать квадратный торт при помощи трёх прямолинейных разрезов от края торта до края? Разрезы не совпадают.

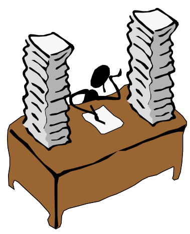
6. Из города Липецка в город Лебедянь выехал велосипедист. Одновременно с ним из города Лебедянь в город Липецк выехал другой велосипедист. Они двигались с постоянными, но различными скоростями. Через час расстояние между велосипедистами равнялось 42 км, а ещё через час 20 км, и они ещё не встретились. Найдите расстояние от Липецка до Лебедяни.

7. Сумма цифр четырёхзначного числа равна 7, а разность суммы двух последних цифр и суммы двух первых цифр равна трём. Найдите все числа, удовлетворяющие указанным условиям. Объясните отсутствие других чисел, соответствующих условию задачи.

8. Красная Шапочка решила отнести бабушке пирожки к обеду. Пройдя половину пути с одной скоростью, она села на пенёк и съела несколько пирожков. После отдыха, чтобы наверстать потерянное время, Красная Шапочка побежала бегом со скоростью в два раза большей первоначальной. Сколько пирожков съела Красная Шапочка, если на один пирожок она тратила время, составляющее $\frac{1}{10}$ от времени на дорогу до бабушки при ходьбе с первоначальной скоростью?

9. На чудо-дереве растут яблоки и апельсины. Изначально было 2014 яблок и 2014 апельсинов. Если с дерева сорвать два одинаковых фрукта, то вырастет один апельсин, а если два разных – то яблоко. К чудо-дереву прибегали чудо-звери и срывали по два фрукта. Так продолжалось до тех пор, пока на дереве остался один фрукт. Что это за фрукт?

10. Мама испекла одинаковые с виду пирожки: 7 с капустой, 7 с мясом и один с вишней, и выложила их по кругу на круглое блюдо именно в таком порядке. Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. Оля знает, как лежали пирожки, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Оле наверняка добиться этого, надломив не больше трёх невкусных пирожков?



Математическая олимпиада «Уникум». 6 класс

1. Восстановите пример $*3 \cdot 3* = 20*4$. Вместо знака звездочки * может стоять любая цифра. Укажите все возможные варианты.

2. Участник олимпиады «Уникум» хочет купить несколько шоколадок, чтобы подкрепиться на олимпиаде. Сколько шоколадок он купит, если у него имеется 100 руб., а стоимость одной шоколадки 35 руб.?

3. Участник олимпиады «Уникум» решил 9 задач, затратив на них 1 час 12 минут. Сколько времени он потратил на последнюю задачу, если на каждую следующую задачу он тратил на одну минуту больше, чем на предыдущую?

4. В финал чемпионата Европы вышли две команды. До соревнований пять болельщиков высказали прогнозы, что в финал выйдут команды: 1) Франции и Голландии; 2) Испании и Италии; 3) Испании и Франции; 4) Англии и Голландии; 5) Голландии и Италии. Один прогноз оказался полностью неверным, а в остальных была правильно названа только одна из команд-финалисток. Какие команды вышли в финал?

5. Можно ли в квадрат со стороной 1 разделить на 2014 непересекающихся квадрата?

6. На какое максимальное число кусков можно разделить круглый торт при помощи четырёх прямолинейных разрезов? А если разрезов пять?

7. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Перед вами трое Уникумов – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Вы можете задать два одинаковых вопроса каждому из Уникумов. На вопросы должны быть ответы «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»). Придумайте вопросы, с помощью которых можно определить кто из Уникумов врун, кто правдивый, а кто хитрец.

8. На занятиях по робототехнике Уникумы сконструировали трёх роботов для гонок на скорость. На соревнованиях сконструированные роботы стартовали одновременно из одной точки круговой дорожки. Через некоторое время они вновь одновременно оказались в точке старта. Известно, что за это время самый быстрый робот обгонял самого медленного 17 раза (обгон в момент старта не учитываем, встреча в итоговой точке не считается обгоном). Сколько всего за это время было случаев, когда один из роботов обгонял другого? Роботы движутся равномерно, но с различными скоростями.

9. Из г. Липецка в г. Усмань выехал велосипедист. Одновременно с ним из г. Усмань в г. Липецк выехал другой велосипедист. Одни двигались с постоянными скоростями. Через час расстояние между велосипедистами равнялось 20 км, а ещё через час движения 35 км. Найдите расстояние от Липецка до Усмани, если за два часа ни один из велосипедистов не доехал до пункта назначения.

10. Перед каждым из чисел 6, 7, …, 11 и 2, 3, 4 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 18 полученных результат складывают. Какую наименьшую по модулю сумму, и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решения V математической олимпиады для младших школьников «Уникум», май 2014

Математическая олимпиада «Уникум». 3 класс

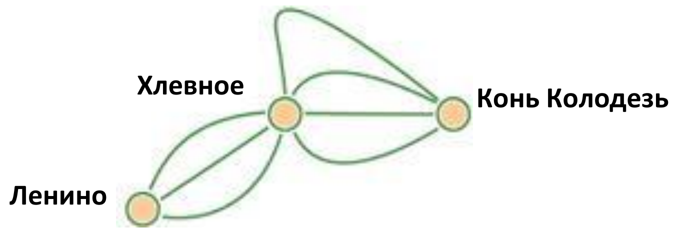
1. Поставьте в записи 1*2*3*4*5=7 вместо звездочек знаки плюс или минус так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример расстановки знаков.

Ответ: 1 + 2 + 3 – 4 + 5 = 7.

2. На олимпиаде «Уникум» каждый участник получил ровно один сертификат. До Вани Иванова сертификаты получили 354 школьника, а после него 465. Сколько было участников олимпиады?

Ответ: 820.

3. Из села Ленино в село Хлевное ведут три дороги, а из села Хлевное в село Конь Колодезь – четыре дороги. Сколько существует путей из села Ленино в село Конь Колодезь? Каждый путь проходит через село Хлевное только один раз.



Ответ: 12.

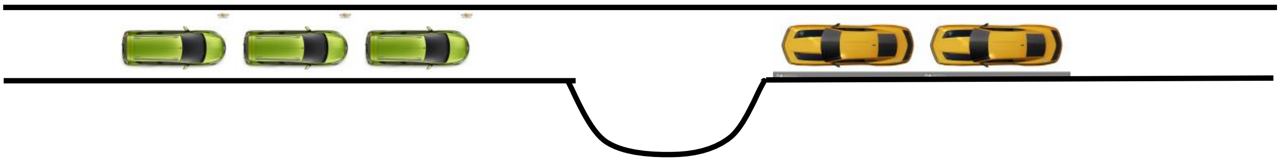
4. Четырехзначное число назовём «двукратным», если одна из его цифр в два раза больше другой и в два раза меньше третьей. Например, в числе 2014 цифра 2 в два раза больше цифры 1 и в два раза меньше цифры 4. Напишите ближайшее «двукратное» число, следующее за 2014.

Решение. 1. Число 2041 удовлетворяет условию.

2. У всех чисел от 2014 до 2041 первые две цифры 2 и 0. Для того чтобы число оказалось «двукратным» две другие цифры должны быть или 1 и 4, или 4 и 8. Таких чисел в промежутке от 2014 до 2041 нет, кроме самих чисел 2014 и 2041.

Ответ: 2041.

5. На узкой дороге, ведущей к центру «Стратегия», два автомобиля разъехаться не могут, но имеется «карман» в который может заехать один автомобиль. По дороге в одну сторону едут друг за другом три автомобиля, а навстречу им ещё два автомобиля. Могут ли автомобили разъехаться так, чтобы продолжать свой путь по-прежнему? А если бы автомобилей было больше?



Решение. 1. Обозначим автомобили справа налево как A, B, C, D, E.

2. Автомобиль E отъезжает достаточно далеко направо. Автомобиль D заезжает в «карман».

3. Автомобили A, B, C проезжают мимо «кармана».

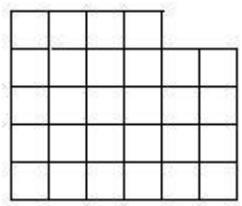
4. Автомобиль D уезжает с узкой дороги.

5. Шаги, аналогичные 1-3, выполняются с автомобилем E.

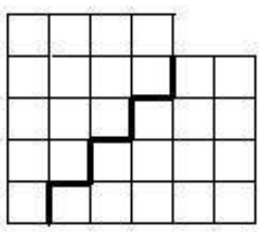
Количество автомобилей на решение задачи не влияет, только время проезда увеличивается.

Ответ: да, да.

6. Бабушка хочет из клетчатой скатерти, которая изображена на рисунке, сделать две одинаковые салфетки. Помогите бабушке и разрежьте скатерть, приведенную на рисунке на две одинаковые части.



Ответ:



7. В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье налили в банку «клубничное»?

Решение. Так как все надписи неправильные, то в третьей банке не может быть ни малиновое, ни клубничное варенье. Значит, там смородиновое варенье. Тогда клубничное и малиновое должны быть в первых двух банках. А так как надписи неправильные, то в банке «клубничное» на самом деле малиновое варенье.

Ответ: малиновое.

8. На какое максимальное число кусков можно разделить круглый торт при помощи трёх прямолинейных разрезов?

Решение. Если из трёх прямых каждые две пересекаются внутри торта, получится 7 кусков. Если же из этих прямых какие-нибудь две параллельны или пересекаются за пределами торта, то кусков будет меньше.

При пересечении двух прямых получается четыре части. Каждая следующая прямая максимально добавляет столько частей, сколько прямых было до её проведения, плюс одну часть.

Ответ: 7 кусков.

Примечание. В задаче подразумевалось, что торт плоский, но решения участников олимпиады, учитывающие, что можно сделать горизонтальные разрезы, также признавались правильными.

9. Имеется четыре различных ключа от четырёх сейфов с различными замками. Каждый ключ подходит ровно к одному сейфу. Какое минимальное количество попыток открыть сейфы нужно предпринять, чтобы точно подобрать ключ к каждому из сейфов?

Решение. 1. Ключом I пробуем открыть сейфы 1, 2 и 3, в результате определим принадлежность ключа I, максимум за три попытки.

2. Остаётся три ключа и три сейфа. Ключом II пробуем открыть сейфы II и III, в результате определим принадлежность ключа II, максимум за две попытки.

3. Остаётся два ключа и два сейфа. В этом случае достаточно одной попытки.

Ответ: 6.

10. *Старинная задача.* Сошлись два пастуха, Иван и Петр. Иван и говорит Петру: «Отдай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец ровно вдвое больше, чем у тебя!» А Петр ему отвечает: «Нет! Лучше ты мне отдай одну овцу, тогда у нас будет овец поровну!»

Сколько же было у каждого овец?

Решение. 1. У Ивана на две овцы больше, чем у Петра.

2. Когда Петр отдаст одну овцу Ивану, то у него станет на четыре овцы меньше, чем у Ивана. А по условию в этом случае у Ивана в два раза больше овец. Значит, у Ивана станет 8 овец, а у Петра 4.

3. Следовательно, первоначально у Ивана было 7 овец, а у Петра 5.

Ответ: у Ивана было 7 овец, а у Петра 5.

Математическая олимпиада «Уникум». 4 класс

1. Поставьте в записи 1*2*3*4*5=25 вместо звездочек знаки арифметических действий: +, –, •, **:** так, чтобы получилось верное равенство. Достаточно привести один пример расстановки знаков.

Ответ: $1\cdot 2+3+4\cdot 5=25$.

2. Участник математической олимпиады «Уникум» выполнил 10 задач за 1 час 10 минут, причем на каждую задачу он затратил одинаковое время. Сколько минут школьнику потребовалось на решение четвёртой задачи?

Ответ: 7 минут.

3. У числа 248 средняя цифра в два раза отличается от крайних. Сколько всего имеется трёхзначных чисел, у которых средняя цифра в два раза отличается от крайних?

Ответ: 12.

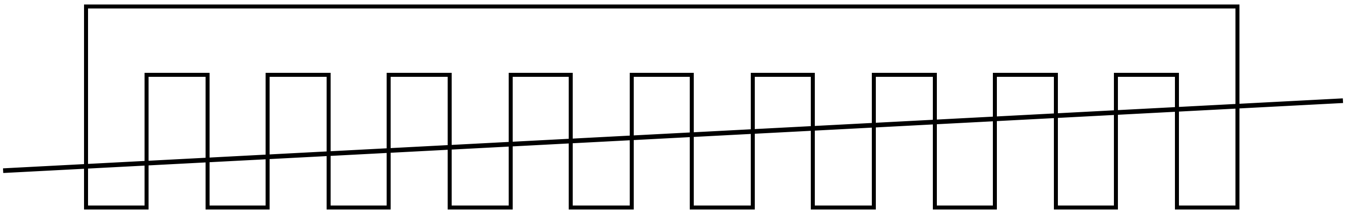
4. На окраску деревянного кубика затратили 4 грамма краски. Когда она высохла, кубик распилили на 8 одинаковых кубиков меньшего размера. Сколько краски потребуется для того, чтобы закрасить образовавшиеся при этом неокрашенные поверхности?

Решение. Первоначально будут покрашены $4\cdot 6=24$ граней маленьких кубиков, а всего этих граней $6\cdot 8=48$. Значит нужно докрасить ровно половину поверхности.

Ответ: 4 грамма.

5. Можно ли испечь такой торт, который может быть разделён одним прямолинейным разрезом на 5 частей? А на 2014 частей?

Решение. Пример торта и прямолинейного разреза на рисунке.



Ответ: да, можно.

6. На олимпиаде «Уникум» первые 4 места заняли школьники Вася, Петя, Ирина и Маша. Сумма мест занятых Васей, Петей и Ириной равна 9, а сумма мест Ирины и Маши равна 5. Какое место занял каждый из названных школьников, если Петя занял более высокое место, чем Вася?

Решение. 1. 1 + 2 + 3 + 4 = 10 – общая сумма мест.

2. 10 – 9 = 1 – место Маши.

3. 5 – 1 = 4 – место Ирины.

4. Петя – 2-й, Вася – 3-й.

Ответ: Маша– 1-я, Петя – 2-й, Вася – 3-й. Ирина – 4-я.

7. Уникум отпил 40 г из чашки (в чашке 180 г) кофе и долил ее молоком. Затем выпил еще 50 г из чашки кофе с молоком и опять долил ее молоком. Потом этот человек выпил полчашки и опять долил чашку молоком до полной чашки. Наконец, этот человек выпил полную чашку. Чего он выпил больше: кофе или молока?

Решение. 40 + 50 + 90 + 180 = 360 г. – всего выпил Уникум.

360 – 180 = 180 г. – Уникум выпил молока, так как первоначально в чашке было только кофе, а в дальнейшем подливалось только молоко.

Ответ: поровну.

8. Кошка Мурка съедает вкусную сосиску за 6 минут, а кот Васька – в 2 раза быстрее. За какое время они съедят сосиску вместе?

Решение. За две минуты кошка съест $\frac{1}{3}$ сосиски, а кот в два раза больше: $\frac{2}{3}$ сосиски. Вместе они съедят целую сосиску.

Ответ: за 2 минуты.

9. В примере на сложение цифры заменили звёздочками. Получилось ** + *** = ****. Известно, что каждое из слагаемых и сумма не изменятся, если прочитать их справа налево. Восстановите исходный пример.

Решение. Первые два числа не могут быть больше 99 и 999 соответственно. Значит, их сумма, равная третьему числу, не превосходит 99 + 999 = 1098 < 2000. Тогда у третьего числа первая цифра (а значит, и последняя) равна 1: ** + *** = 1**1.

Если у второго числа первая цифра меньше 9, то его значение не превосходит 898. Тогда сумма первого и второго числа не превосходит 99 + 898 = 997 < 1000. Такого быть не может, так как третье число четырёхзначное. Тогда у второго числа первая (а значит, и последняя) цифра должна быть равна 9: ** + 9*9 = 1**1.

Чтобы при увеличении на 9 получилось число, оканчивающееся на 1, последняя (а значит, и первая) цифра исходного числа должна быть равна 2: 22 + 9*9 = 1**1.

У второго числа оставшаяся неизвестная цифра должна быть больше 6, так как иначе сумма не будет четырёхзначной: 22 + 969 = 991 < 1000. Значит, она равна 7, 8 или 9. Разберём эти три варианта:

22 + 979 = 1001;

22 + 989 = 1011;

22 + 999 = 1021.

Подходит только первый вариант.

Ответ. 22 + 979 = 1001.

10. Уникум выписывал в ряд натуральные числа по порядку: 12345678910111213141516171819... Какая цифра стоит на 2014 месте?

Решение. Первые 9 цифр относятся к однозначным числам, следующие $2 \cdot 90$ = 180 к двузначным. Остаётся ещё 2014 − 189 = 1825 цифра. Из них состоят 1825⁄3 = 608 трёхзначных чисел и еще одна следующая цифра. Последнее из трехзначных чисел будет равно 99 + 608 = 707, а следующее 708. Значит, 2014-я цифра будет 7.

Ответ: 7.

Математическая олимпиада «Уникум». 5 класс

1. Определите последнюю цифру в произведении

$$2010 \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019.$$

Ответ: 0.

2. Участник олимпиады «Уникум» решил первую задачу за четыре минуты, а на каждую следующую задачу он тратил на одну минуту больше, чем на предыдущую. Сколько времени он потратил на решение 9 задач?

Решение. 4 + 5 +6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 72 мин.

Ответ: 1 час 12 минут или 72 мин.

3. Три человека заплатили за обед 30 рублей (каждый по 10). После их ухода хозяйка обнаружила, что обед стоит не 30, а 25 рублей, и отправила мальчика с 5 рублями вдогонку. Каждый из путников взял себе по рублю, а 2 рубля они оставили мальчику. Выходит, что каждый из них заплатил не по 10, а по 9 рублей. Их было трое: $9 \cdot 3 = 27$, и еще два рубля у мальчика: 27 + 2 = 29. Куда делся рубль?

Решение. У хозяйки 25 рублей, у мальчика 2 рубля. Всего 27 рублей, значит те 2 рубля, которые у мальчика, входят в цифру 27. А в условии задачи к 27 прибавлено 2 рубля, которые у мальчика, и поэтому получается 29. Надо к 27 не прибавлять 2 рубля, а отнимать.

4. Уникум предлагал своему товарищу написать любое двузначное число, затем поменять местами цифры этого числа и вычесть из большего меньшее. После выполненных действий Уникум просил товарища назвать последнюю цифру полученной разности и по названной цифре определял всю разность. Как Уникуму удалось это сделать?

Решение. 1. Полученная разность обязательно делится на 9. Если двузначное или однозначное число делится на 9 и известна его последняя цифра, то само число можно однозначно определить: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 (хотя 90 получиться не может).

5. На какое число кусков можно разрезать квадратный торт при помощи трёх прямолинейных разрезов от края торта до края? Разрезы не совпадают.

Решение. Если из трёх прямых каждые две пересекаются внутри торта, получится 7 кусков. Если же из этих прямых какие-нибудь две параллельны или пересекаются за пределами торта, то кусков будет меньше.

При пересечении двух прямых получается четыре части. Каждая следующая прямая максимально добавляет столько частей, сколько прямых было до её проведения, плюс одну часть.

Наименьшее число кусков 4. Одна прямая делит торт на две части каждая следующая прямая, как минимум, добавляет одну часть.

Ответ: от 4 до 7 кусков.

Примечание. В задаче подразумевалось, что торт плоский, но решения участников олимпиады, учитывающие, что можно сделать горизонтальные разрезы, также признавались правильными.

6. Из г. Липецка в г. Лебедянь выехал велосипедист. Одновременно с ним из г. Лебедянь в г. Липецк выехал другой велосипедист. Они двигались с постоянными, но различными скоростями. Через час расстояние между велосипедистами равнялось 42 км, а ещё через час 20 км, и они ещё не встретились. Найдите расстояние от Липецка до Лебедяни.

Решение. 1. 42 – 20 = 22 км – расстояние, на которое один велосипедист приближался к другому за час (другими словами скорость сближения велосипедистов равна 22 км/ч).

2. 22 + 22 + 20 = 64 км – искомое расстояние.

Ответ: 64 км.

7. Сумма цифр четырёхзначного числа равна 7, а разность суммы двух последних цифр и суммы двух первых цифр равна трём. Найдите все числа, удовлетворяющие указанным условиям. Объясните отсутствие других чисел, соответствующих условию задачи.

Решение. 1. 7 + 3 = 10 – удвоенная сумма двух последних цифр задуманного четырехзначного числа.

2. 10 : 2 = 5 – сумма двух последних цифр задуманного четырехзначного числа.

3. 7 – 5 = 2 – сумма двух первых цифр задуманного четырехзначного числа.

Таким образом, первые две цифры – это 20 или 11. две последние цифры: 50, 41, 32, 23, 14, 05.

Ответ: 2050, 2041, 2032, 2023, 2014, 2005, 1150, 1141, 1132, 1123, 1114, 1105.

8. Красная Шапочка решила отнести бабушке пирожки к обеду. Пройдя половину пути с одной скоростью, она села на пенёк и съела несколько пирожков. После отдыха, чтобы наверстать потерянное время, Красная Шапочка побежала бегом со скоростью в два раза большей первоначальной. Сколько пирожков съела Красная Шапочка, если на один пирожок она тратила время, составляющее $\frac{1}{10}$ от времени на дорогу до бабушки при ходьбе с первоначальной скоростью?

Решение. 1. Обозначим время, за которое Красная Шапочка планировала добраться до бабушки как 10 пирожков.

2. 5 пирожков – половина времени.

3. 2,5 пирожка – время, сэкономленное на второй половине пути.

4. 2,5 пирожка – время, потраченное на отдых.

Ответ: 2,5 пирожка.

Примечание. Возможны и другие способы решения.

9. На чудо-дереве растут яблоки и апельсины. Изначально было 2014 яблок и 2014 апельсинов. Если с дерева сорвать два одинаковых фрукта, то вырастет один апельсин, а если два разных – то яблоко. К чудо-дереву прибегали чудо-звери и срывали по два фрукта. Так продолжалось до тех пор, пока на дереве остался один фрукт. Что это за фрукт?

Решение: 1. Пусть А – это апельсин, Я – это яблоко. Возможные операции $AA \to A$, $ЯЯ \to A$, $AЯ \to Я$.

В любом случае чётность количества яблок не меняется. Первоначально яблок чётное число, следовательно, в любой момент времени яблок будет чётное число. Одного яблока не может быть. Но каждый раз количество фруктов уменьшается, значит, когда-нибудь останется только один фрукт: апельсин.

Ответ: апельсин.

10. Мама испекла одинаковые с виду пирожки: 7 с капустой, 7 с мясом и один с вишней, и выложила их по кругу на круглое блюдо именно в таком порядке. Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. Оля знает, как лежали пирожки, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Оле наверняка добиться этого, надломив не больше трёх невкусных пирожков?

Решение. Если первый надломленный пирожок окажется с мясом, то вкусный пирожок находится в группе следующих по кругу семи пирожков, если же с капустой, то в группе предыдущих. В любом случае в этой группе пирожки идут в порядке мясо-вишня-капуста. Оле нужно надломить центральный пирожок в этой группе. Если он с мясом, то вкусный пирожок находится в тройке следующих пирожков, если с капустой, то в тройке предыдущих. Надломив центральный пирожок в этой тройке, Оля таким же образом узнает, какой из пирожков вкусный. Значит, если за три раза Оле не попался вкусный пирожок, то в четвертый раз она уже точно может съесть его.

Математическая олимпиада «Уникум». 6. класс

1. Восстановите пример $*3\cdot 3* = 20*4$. Вместо знака звездочки * может стоять любая цифра. Укажите все возможные варианты.

Ответ: $53\cdot 38 = 2014$.

2. Участник олимпиады «Уникум» хочет купить несколько шоколадок, чтобы подкрепиться на олимпиаде. Сколько шоколадок он купит, если у него имеется 100 руб., а стоимость одной шоколадки 35 руб.?

Ответ: 2.

3. Участник олимпиады «Уникум» решил 9 задач, затратив на них 1 час 12 минут. Сколько времени он потратил на последнюю задачу, если на каждую следующую задачу он тратил на одну минуту больше, чем на предыдущую?

Решение. 1. 1 ч. 12 мин. = 72 мин.

2. 72 : 9 = 8 мин. – было бы потрачено на каждую задачу, если бы все задачи требовали одинакового времени.

3. 4 + 5 +6 + 7 + **8** + 9 + 10 + 11 + 12 = 72.

Ответ: 12 минут.

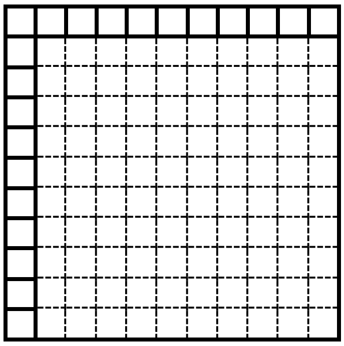
4. В финал чемпионата Европы вышли две команды. До соревнований пять болельщиков высказали прогнозы, что в финал выйдут команды: 1) Франции и Голландии; 2) Испании и Италии; 3) Испании и Франции; 4) Англии и Голландии; 5) Голландии и Италии. Один прогноз оказался полностью неверным, а в остальных была правильно названа только одна из команд-финалисток. Какие команды вышли в финал?

Решение. Искомые страны должны встречаться в парах 4 раза (по 1 на каждый полуверный прогноз). Таким образом, это или Англия-Голландия (1+3), или Франция-Испания, или Испания-Италия, или Франция-Италия (2+2). Из этих пар только Франция-Италия не встречаются в одном прогнозе.

Ответ: Франция-Италия.

5. Можно ли в квадрат со стороной 1 разделить на 2014 непересекающихся квадрата?

Решение. Например, возьмем 2013 квадратов со стороной $\frac{1}{1007}$ и один квадрат со стороной $\frac{1006}{1007}$.



Ответ: да, можно.

6. На какое максимальное число кусков можно разделить круглый торт при помощи четырёх прямолинейных разрезов? А если разрезов пять?

Решение. При пересечении двух прямых получается четыре части. Каждая следующая прямая максимально добавляет столько частей, сколько прямых было до её проведения, плюс одну часть.

Ответ: 11 кусков, 16 кусков.

Примечание. В задаче подразумевалось, что торт плоский, но решения участников олимпиады, учитывающие, что можно сделать горизонтальные разрезы, также признавались правильными.

7. Известно, что вруны всегда врут, правдивые всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Перед вами трое Уникумов – врун, правдивый и хитрец, которые знают, кто из них кто. Вы можете задать два одинаковых вопроса каждому из **Уникумов**. На вопросы должны быть ответы «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»). Придумайте вопросы, с помощью которых можно определить кто из Уникумов врун, кто правдивый, а кто хитрец.

Решение. Спросим каждого: «Верно ли, что оба твоих соседа – вруны?». Среди трех ответов есть «Да» вруна и «Нет» правдивого, поэтому один из ответов будет дан ровно один раз. Ответ, который был дан единственный раз, принадлежит или вруну, или правдивому, назовем этого человека A. Причем нам уже известно кто A, правдивый или лгун. Задав A вопрос про одного из двух других: «Верно ли, что он хитрец», мы все узнаем.

Примечание. Возможны и другие правильные варианты вопросов.

8. На занятиях по робототехнике Уникумы сконструировали трёх роботов для гонок на скорость. На соревнованиях сконструированные роботы стартовали одновременно из одной точки круговой дорожки. Через некоторое время они вновь одновременно оказались в точке старта. Известно, что за это время самый быстрый робот обгонял самого медленного 17 раза (обгон в момент старта не учитываем, встреча в итоговой точке не считается обгоном). Сколько всего за это время было случаев, когда один из роботов обгонял другого? Роботы движутся равномерно, но с различными скоростями.

Решение. 1. Для совершения каждого обгона, с учётом одновременного старта в одной точке и завершения движения в той же точке, более быстрому роботу требуется преодолеть ровно на один круг больше, чем более медленному. Следовательно, самый быстрый робот преодолел на 17 кругов больше самого медленного.

2. Средний по скорости робот преодолел на x кругов больше самого медленного и на $(17 – x)$ кругов меньше самого быстрого. Таким образом, количество обгонов, в которых участвовал средний по скорости робот, равно 17.

17 + 17 = 34.

Ответ: 34.

9. Из города Липецка в город Усмань выехал велосипедист. Одновременно с ним из г. Усмань в г. Липецк выехал другой велосипедист. Одни двигались с постоянными скоростями. Через час расстояние между велосипедистами равнялось 20 км, а ещё через час движения 35 км. Найдите расстояние от Липецка до Усмани, если за два часа ни один из велосипедистов не доехал до пункта назначения.

Решение. Так как за второй час движения расстояние между велосипедистами увеличилось, то они некоторое время двигались в противоположных направлениях. Это возможно тогда, когда велосипедисты в какой-то момент движения встретились и продолжили движение дальше.

За первый час велосипедисты встретиться не могли, тогда один из них за час преодолел бы половину пути, что невозможно по условию.

1. 20 + 35 = 55 км – изменение расстояния между велосипедистами за один час (другими словами скорость сближения или скорость удаления равна 55 км/ч).

2. $2 \cdot 55 = 110$ км – изменение расстояния между велосипедистами за два часа.

3. 110 – 35 =75 км – искомое расстояние, так как вместе велосипедисты проехали на 35 км больше, чем искомый путь.

Ответ: 75 км.

10. Перед каждым из чисел 6, 7, …, 11 и 2, 3, 4 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 18 полученных результат складывают. Какую наименьшую по модулю сумму, и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. 1. В первом наборе обозначим числа $a_1 = \pm 6$, $a_2 = \pm 7$, …, $a_6 = \pm 11$.

Во втором наборе обозначим числа $b_1 = \pm 2$, $b_2 = \pm 3$, $b_3 = \pm 4$.

2. После преобразований искомая сумма будет равна

$S = \left| 3 \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_6) + 6 \cdot (b_1 + b_2 + b_3) \right|$.

3. Сумма будет наибольшей, если все слагаемые положительны: $S_{\max} = 3 \cdot (6+7+8+9+10+11) + 6 \cdot (2+3+4) = 207$.

4. Оба слагаемых в сумме кратны 3, следовательно, и сумма будет кратна 3. Первое слагаемое в сумме нечетно, а второе четно, следовательно, и сумма бу-

дет нечетна. Таким образом, искомая сумма должна быть нечетна и кратна 3.Приведем пример суммы для наименьшего из таких чисел, числа 3:

$$S_{\min} = \left|3 \cdot (6 - 7 + 8 - 9 - 10 + 11) + 6 \cdot (2 + 3 - 4)\right| = 3$$

Ответ: 3; 207.

Литература

1. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. – М.: Бюро Квантум, 2007. – 60 с. (Библиотека «Квант», вып. 100, приложение к журналу «Квант» № 2 / 2007).

2. Сборник заданий математических олимпиад «УНИКУМ» для обучающихся 3-6 классов: Учебное пособие / Сост.: Г.А. Воробьев, Е.А. Зайцев, И.А. Шуйкова. – 1-е изд. – Липецк: МАУ ДО «Центр дополнительного образования «Стратегия», 2013. - 132 с.

3. Дрозина В.В., Дильман В.Л. Механизм творчества решения нестандартных задач. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 255 с.

4. Занимательные математические задачи. Дополнительные занятия для учащихся 6 классов: Учебное пособие / Сост.: А.М. Быковская, Г.Я. Куклина. - 2-е изд., испр. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. – 88 с.

5. Канель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи / А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.

6. Спивак А.В. Математический кружок. – М.: Посев, 2003. – 128 с.

7. Турецкий Е.Н., Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

8. Фарков А.В. Математические олимпиады. – М.: Экзамен, 2006. – 160 с.

9. Чамян П.Г., Воробьев Г.А. Инварианты: одинаковые и разные [Текст] // Интеграционные тенденции современной науки: материалы III межвузовской науч.-практ. конференции – Липецк: ЛГПУ, 2010. – С. 25-29.

10. Чамян П.Г., Воробьев Г.А. Инварианты в школе [Электронный ресурс] // Инновации и информационные технологии в образовании : Сборник науч. трудов III Международной науч.-практ. конференции; г. Липецк, 09, 29-30 ап-

реля 2010 г. – Липецк: ЛГПУ, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-88526-483-9.

11. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, 2007. – 40 с.

12. Воробьев Г.А., Шипилов И.А. Задачи с игровым содержанием на факультативных занятиях по математике // Интеграционные тенденции современной науки : Сб. матер. III межвузовской студенческой конференции – Липецк: ЛГПУ, 2010. – С. 193-198.

13. Портал Всероссийской олимпиады школьников http://www.rusolimp.ru.

14. ЗФТШ МФТИ http://www.scool.mipt.ru.

15. Турнир Городов – международная математическая олимпиада для школьников http://www.turgor.ru.

16. Сайт математической олимпиады «Уникум» http://www.unikum.strategy48.ru.

Оглавление